Décomposition de Dunford - Réduction de Jordan

20 décembre 2020

1. Endomorphisme (matrice) nilpotent (e)
2. Décomposition de Dunford
3. Sous espaces caractéristiques
4. Lemme de décomposition des noyaux
5. Décomposition de Jordan

Définition 1.1

Soient E un espace vectoriel de dimension n,
Un endomorphisme f de E est **nilpotent** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$.
On pose $p = min\{k \in \mathbb{N}^* / f^k = 0\}$.
l'entier p est appelé l'indice de nilpotence de f.
f est nilpotent d'indice $p \iff f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.
et dans ce cas on a

$$\ker(f) \subset \ker(f^2) \subset ... \subset \ker(f^k) = E.$$

Une matrice A est nilpotente $\iff \exists p \in \mathbb{N}^* / A^p = 0$.

Proposition 1.2

Soit A une matrice (ou $f \in \mathcal{L}(E)$) nilpotente non nulle, alors :
(1) A est non inversible (on dit aussi A est singulier).
(2) $Sp(A) = \{0\}$
(3) $m_A(X) = X^m$ avec $2 \leqslant m \leqslant n$
(4) A n'est pas diagonalisable.
(5) Toute matrice semblable à A est aussi nilpotente.

Proposition 1.3

Soient f et g deux endomorphismes nilpotents dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$, alors $f + g$ est aussi nilpotent.
pour les matrices :
Si A et B sont deux matrices nilpotentes telle que $AB = BA$
alors $A + B$ est nilpotente.

Preuve :

2. Décomposition de Dunford

Théorème 2.1

Soit f un endomorphisme de E tel que le polynôme caractéristique $P_f(X)$ est scindé.
alors, il existe un unique couple (N, Δ) d'endomorphismes, tel que :
(1) $f = N + \Delta$,
(2) N nilpotent et Δ diagonalisable,
(3) $\Delta \circ N = N \circ \Delta$.

Version matricielle :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que le polynôme caractéristique $P_A(X)$ est scindé.
alors, il existe un unique couple (N, Δ) de matrices tel que :
(1) $A = N + \Delta$,
(2) N nilpotent et Δ diagonalisable,
(3) $\Delta N = N\Delta$.

2. Décomposition de Dunford

Remarque

Attention Δ est une matrice diagonalisable, pas nécessairement une matrice diagonale.
Comme Δ est diagonalisable, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $D = P^{-1}\Delta P$.
Si on note $N' = P^{-1}NP$ alors N' est encore nilpotente et $N'D = DN'$.
Une autre façon d'écrire la décomposition de Dunford est alors :
$P^{-1}AP = D + N'$.
C'est-dire que A est semblable à la somme d'une matrice diagonale avec une matrice nilpotente.

Remarque 2.2

(1) f diagonalisable $\iff$ $f = \Delta$ $\iff$ $N = 0$,
(2) f nilpotent $\iff$ $f = N$ $\iff$ $\Delta = 0$,

Exemple 2.3

(1) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. Déterminer la décomposition de Dunford de A.

Exemple 2.3

(2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

On considère les deux matrices suivantes

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

et

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

1. Vérifier que la matrice C est nilpotente.
2. Déterminer l'ensemble F des scalaires α pour lesquels $B + C$ est la décomposition de Dunford de A.

Formule de Binôme de Newton

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices telles que $AB = BA$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$(A+N)^p = \sum_{k=0}^{n} pC_p^k A^k B^{p-k}.$$

Exemple

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Calculer A^n en fonction de n.

3. Sous espaces caractéristiques

3.1. Sous espaces caractéristiques

Soit f un endomorphisme de E : un e.v de dimension n.
On suppose que le polynôme caractéristique $P_n(X)$ est scindé, c.à.d il s'écrit sous forme

$$P_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{\alpha_1}....(X-\lambda_p)^{\alpha_p}$$

où $\alpha_1, ...\alpha_p \geqslant 1$ et $\lambda_1, ...\lambda_p \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes,

Définition 3.1

On appelle **sous espace caractéristique associé** à λ_i
le sous espace vectoriel

$$N_{\lambda_i} = \ker(f-\lambda_i.I_d)^{\alpha_i}$$

où $(f-\lambda_i.I_d)^{\alpha_i} = (f-\lambda_i.I_d)\circ....\circ(f-\lambda_i.I_d)$.

Proposition 3.2

Pour tout $i = 1....p$ le sous espace N_{λ_i} est stable par f
c.à.d

$$f(N_{\lambda_i}) \subset N_{\lambda_i}.$$

En effet : soit $x \in N_{\lambda_i}$
On a $(f - \lambda_i.I_d)^{\alpha_i}(x) = 0$
comme $f \circ (f - \lambda_i.I_d)(y) = f \circ f(y) - \lambda_i f(y) = (f - \lambda_i.I_d) \circ f(y)$
donc f et $(f - \lambda_i.I_d)$ commutent
donc $(f - \lambda_i.I_d)^{\alpha_i}(f(x)) = f(f - \lambda_i.I_d)^{\alpha_i}(x) = f(0) = 0$
ce qui montre que $f(x) \in N_{\lambda_i}$.

Remarque

On verra qu'on a toujours $E = N_{\lambda_1} \oplus .... \oplus N_{\lambda_p}$ que soit f diagonalisable ou non.

4. Lemme de décomposition des noyaux

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

Lemma 4.1

Soit f un endomorphisme de E et $P_1, ...P_k$ des polynômes premiers entre eux dans $\mathbb{K}[X]$.
On note $P = \prod_{i=1}^{k} P_i$ le polynôme produit,
alors,

$$\ker P(f) = \ker(P_1(f) \oplus .... \oplus \ker(P_k(f)).$$

Preuve :

Théorème 4.2 (de décomposition des noyaux)

Soit f Un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé, c.à.d $P_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{\alpha_1}....(X-\lambda_p)^{\alpha_p}$
où $\alpha_1, ...\alpha_p \geqslant 1$ et $\lambda_1, ...\lambda_p \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes,
Alors

$$E = \ker(f-\lambda_1 I_d)^{\alpha_1} \oplus .... \oplus \ker(f-\lambda_p I_d)^{\alpha_p}.$$

Preuve :
Les polynômes $(X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux.
Donc , d'après le lemme précédent,

$$\ker(P_f(f)) = \ker(f-\lambda_1 I_d)^{\alpha_1} \oplus .... \oplus \ker(f-\lambda_p I_d)^{\alpha_p}.$$

comme $P_f(f) = 0$ (th de Caylay-Hamilton)
alors

$$E = \ker(f-\lambda_1 I_d)^{\alpha_1} \oplus .... \oplus \ker(f-\lambda_p I_d)^{\alpha_p}.$$

Exemple 4.3

On considère l'endomorphisme f défini par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

On a $P_f(X) = -(X-1)(X+1)^2$
Donc $\mathbb{R}^3 = \ker(f - I_3) \oplus \ker(f + I_3)^2$.

Théorème 4.4 (Réduction selon les espaces caractéristiques)

Soit f Un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé, c.à.d
$P_f(X) = (-1)^n(X-\lambda_1)^{\alpha_1}....(X-\lambda_p)^{\alpha_p}$
où $\alpha_1, ...\alpha_p \geqslant 1$ et $\lambda_1, ...\lambda_p \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes,
Alors il existe une base adaptée $B = B_1 \cup .... \cup B_p$
où B_i est une base de $N_{\lambda_1} = \ker(f-\lambda_i I_d)^{\alpha_i}$
tel que :

$$M_B(f)\begin{pmatrix} A_{\lambda_1} & . & . & 0 \\ 0 & . & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & A_{\lambda_p} \end{pmatrix},$$

où

$$A_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} \lambda_i & \star & \star & \star \\ 0 & . & \star & \star \\ . & . & . & \star \\ 0 & . & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

est une matrice de la restriction de f à N_{λ_i} dans la base B_i.

5. Décomposition de Jordan

5.1 Blocs et matrices de Jordan

Nous allons montrer que toute matrice, dont le polynôme caractéristique est scindé, est semblable à une matrice diagonale par blocs, avec des blocs « presque » diagonaux.

définition 5.1

Un bloc de Jordan est une matrice de la forme :

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & .. & 0 \\ 0 & . & . & : \\ : & . & . & 1 \\ 0 & .. & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
$J_\lambda \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure, avec des coefficients λ sur la diagonale, des 1 juste au-dessus de la diagonale, puis des 0 encore au-dessus.

Exercice : Soit $J_\lambda \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ un bloc de Jordan,
1. montrer que son polynôme caractéristique est
$P_J(X) = (-1)^p(X-\lambda)^p$
et que son polynôme minimal est $m_J(X) = (X-\lambda_1)^p$.

définition 5.2

Une matrice de Jordan est une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & .. & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & . & : \\ : & . & . & 0 \\ 0 & .. & 0 & J_{\lambda_r} \end{pmatrix},$$

où J_{λ_i} sont des blocs de Jordan.
Les blocs de Jordan peuvent être de tailles différentes,
les valeurs λ_r sont quelconques (certaines d'entre elles peuvent être égales).

Exemple 5.3

On considère la matrice suivante

. La matrice J contient quatre blocs,
. Elle est formée d'un bloc de Jordan 2×2 associé à la valeur propre 2,
. un bloc de Jordan 3×3 associé à cette même valeur 2,
. un bloc de Jordan 1×1 associé à la valeur 3,
. un bloc de Jordan 3×3 associé à la valeur 4.

5.1 Décomposition de Jordan pour les matrices nilpotentes

Théorème 5.1

Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
Alors N est semblable à la matrice qui s'écrit par blocs de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & . & . & . \\ : & . & . & 0 \\ 0 & .. & 0 & J_s \end{pmatrix},$$

avec

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & .. & 0 \\ 0 & . & . & : \\ : & . & . & 1 \\ 0 & .. & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Les matrices J_i sont appelées **"blocs de Jordan nilpotent"**.

5.2 Décomposition de Jordan pour une matrice quelconque

Théorème 5.2

Soit A une matrice de $\mathbb{K}[X]$ dont le polynôme caractéristique est scindé,
Alors A est semblable à la matrice qui s'écrit par blocs de la manière suivante :

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & . & . & . \\ : & . & . & 0 \\ 0 & .. & 0 & J_r \end{pmatrix},$$

avec

$$J_r = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & .. & 0 \\ 0 & . & . & : \\ : & . & . & 1 \\ 0 & .. & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

où les λ_i sont les valeurs propres (non-nécessairement distinctes) de

Théorème 5.2 (version endomorphisme)

Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé,
Il existe une base B de E dans laquelle la matrice de f est de Jordan, c.à.d

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & . & . & . \\ : & . & . & 0 \\ 0 & .. & 0 & J_r \end{pmatrix},$$

Remarque 5.3 (Multiplicité et blocs De Jordan)

Soit λ une valeur propre d'un endomorphisme f (ou une matrice A).
(1) **Multiplicité géométrique=** $dim(E_\lambda)$ = Le nombre de blocs associés à la valeur propre λ.
(2) **Multiplicité de λ dans le polynôme minimal=** ordre de nilpotence de N_λ = la taille du plus grand bloc associé à λ.
(3) **Multiplicité algébrique=** m_λ = l'ordre de multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique= La somme des tailles des blocs de Jordan associés à λ est la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique.
Ex : si λ est simple, Multiplicité algébrique = $m_\lambda = 1$

Exemple 5.4

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique $P_A(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$
Donc $\lambda = 1$ est une valeur propre double,
Déterminer la matrice de Jordan de A.

Exemple 5.5

On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique $P_B(X) = (2 - X)(X - 1)^2$
Montrer que B n'est pad diagonalisable (en utilisant le polynôme minimal).
Déterminer la réduite de Jordan de B.

Les divers situations possibles en dimension : 2, 3 et 4

dimension 2

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
Si A admet deux valeurs propres distinctes, alors elle est diagonalisable.
Si A admet une valeur propre double λ et $A \neq \lambda I_2$, alors la réduite de Jordan est de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

Les divers situations possibles en dimension : 2, 3 et 4

dimension 3

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.

(1) A admet deux valeurs propres : $\begin{cases} \lambda_1 & \textit{simple} \\ \lambda_2 & \textit{double} \end{cases}$

alors la réduite de Jordan est de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

seul v_1 et v_2 sont des vecteurs propres,
v_3 n'et pas propre.

Les divers situations possibles en dimension : 2, 3 et 4

dimension 3

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
(2) A admet une valeurs propre λ triple et $dim(E_\lambda) = 2$
$(E_\lambda = vect(v_1, v_2))$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

seul v_1 et v_2 sont des vecteurs propres,
v_3 n'et pas propre.

Les divers situations possibles en dimension : 2, 3 et 4

dimension 3

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
(3) A admet une valeurs propre λ triple et $dim(E_\lambda) = 1$
($E_\lambda = vect(v_1)$)

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

un seul vecteur propre v_1 .
v_2 et v_3 ne sont pas des vecteurs propres,

Les divers situations possibles en dimension : 2, 3 et 4

dimension 4

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.

(1) A admet trois valeurs propres $\begin{cases} a & \textit{simple} \\ b & \textit{simple} \\ c & \textit{double} \end{cases}$

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

Les divers situations possibles en dimension : 2, 3 et 4

dimension 4

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.

(2) A admet trois valeurs propres $\begin{cases} a & \textit{double} \\ b & \textit{double} \end{cases}$

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

Les divers situations possibles en dimension : 2, 3 et 4

dimension 4

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.

(3) A admet trois valeurs propres $\begin{cases} a & \textit{simple} \\ b & \textit{triple} \end{cases}$

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

Les divers situations possibles en dimension : 2, 3 et 4

dimension 4

Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$.

(4) A admet trois valeurs propres $\begin{cases} a & \textit{simple} \\ b & \textit{triple} \end{cases}$

$$J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \text{ou} \quad J = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \text{ou}$$

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

Exemples 5.6

Reprenons l'exemple où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique $P_B(X) = -(X+1)^2(X-1)$
-Montrer que B n'est pas diagonalisable.
-Déterminer la réduite de Jordan ainsi que la matrice de passage P.

Exemples 5.7

Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$, défini par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique $P_A(X) = (X+1)^3$
donc A admet une valeur propre $\lambda = -1$ triple.
Puisque $A \neq -I_3$, A n'est pas diagonalisable.
Jordanisation de A :

Exemples 5.8

Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$, défini par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique $P_A(X) = (X-1)^2(X-2)^2$
donc A admet deux valeurs propres $\lambda = 1$ double et 2 double.

Exemples 5.9

Soit f un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$, défini par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Le polynôme caractéristique $P_A(X) = (X-1)^2(X-2)^2$
donc A admet deux valeurs propres $\lambda = 1$ double et 2 double.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION